

Estabilización de un péndulo invertido sobre base móvil mediante control híbrido.

R. Murueta Fortiz¹, W. F. Guerrero Sánchez¹, V. V. Alexandrov¹, J. F. Guerrero Castellanos²

¹ Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (BUAP), 72570 Puebla, Pue., México

² Ingeniería Mecatrónica de la Universidad Politécnica de Puebla (UPP), 72640 Juan C. Bonilla, Pue., México

Abstract. En este trabajo se hace el análisis del modelo matemático del sistema péndulo invertido sobre base móvil y la implementación de una ley de control sugerida por K. Aström y K. Furuta [1], para resolver el problema del swing-up. Con esta ley de control más una ley de control de estabilización se resuelven los dos subproblemas a los que este sistema da origen; llevar al péndulo a la cercanía del punto de equilibrio inestable y estabilizarlo en ese punto, estrategia conocida por algunos autores como control híbrido. La implementación de esta estrategia de control se realizó en el péndulo de la firma Feedback, prototipo que se encuentra en el Laboratorio de Sistemas Dinámicos Controlable de la FCFM-BUAP. Confirmando que de la teoría a la práctica existe un horizonte no despreciable.

1 Introduction

El control de un péndulo invertido constituye un problema clásico dentro del campo del control no lineal. Existen diferentes variantes del problema, entre las que destacan: péndulo de Furuta [1], péndulo sobre un vehículo de dos ruedas con motores independientes [2] y péndulo sobre una base (carro) móvil [3]; y otros casos derivados de estas como el péndulo con volante de inercia, el acrobot, el pendubot, el doble péndulo invertido, etc. A su vez, existe una amplia gama de controladores (lineales, no lineales, óptimos robustos, predictivos, etc.) que han sido diseñados para estas aplicaciones en las últimas décadas.

En el problema del control del péndulo invertido se nos presenta un problema mucho más general y complejo que el del simple mantenimiento de la varilla del péndulo en la posición invertida (problema de estabilización): es el problema de llevar el péndulo desde la posición de equilibrio estable (posición colgante), a las cercanías de la posición invertida. Problema conocido como swing up [4].

El problema del swing up es de distinta naturaleza con respecto al de estabilización local puesto que se trata de un problema global y no lineal. Se trata, por tanto, de un ejemplo relativamente simple de problema no lineal donde el tratamiento lineal es insuficiente y que puede servir como banco de pruebas para las diversas teorías de control no lineal.

*M. A. Moreno, C. A. Cruz, J. Álvarez, H. Sira (Eds.)
Special Issue: Advances in Automatic Control and Engineering
Research in Computing Science 36, 2008, pp. 317-326*

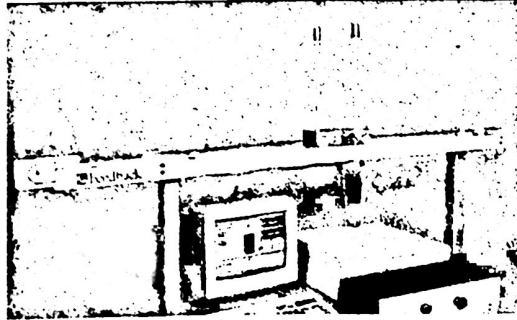


Fig. 1. Sistema del péndulo de Feedback.

En este trabajo básicamente se pretende resolver el problema de control para el péndulo de la firma Feedback, para esto, usamos resultados previos obtenidos para este dispositivo como el algoritmo de estabilización y técnicas de identificación trabajadas en [5]. Por lo que si se plantea el uso del enfoque híbrido [6] y usando los resultados previos antes mencionados, resta hallar un control para el problema del swing up. Sin embargo, existe en la literatura métodos de control basados en energía para resolver el problema de swing up, por lo que si optamos por elegir alguno de estos (específicamente el propuesto en [1]), resta la parte de implementación en el prototipo y la comprobación de su efectividad.

El trabajo esta organizado de la siguiente manera. En el segundo apartado se describe el prototipo que se desea controlar, enseguida se hace análisis del sistema, lo cual consiste en extraer un modelo matemático simplificado y finalmente se muestran los parámetros experimentales que aparecen en éste. En el apartado tercero se hace síntesis del sistema, es decir, se diseña un control para la estabilización y también un control para el balanceo según [1]. Como cuarto apartado se anotan algunas conclusiones y posibles trabajos futuros.

2 Análisis del péndulo de Feedback.

Descripción del prototipo

El sistema a controlar es el péndulo de Feedback prototipo que aparece en la figura 1. Este consiste en dos varillas que giran libremente por uno de sus extremos mediante articulaciones situadas en una base (con forma de vehículo), la cuál se mueve sobre una guía rectilínea horizontal de magnitud constreñida bajo la acción de una fuerza u paralela a la guía, provocada por un motor de CD, esta fuerza es la acción de control con la que se pretende actuar sobre las posiciones de las varillas.

Modelación matemática del sistema

El sistema del péndulo de Feedback se puede reducir al estudio de un sistema de dos grados de libertad y un solo actuador, se trata pues, de un sistema subactuado con dos grados de libertad. Para efectos de la modelación matemática, consideramos que se trata de un solo péndulo de estructura rígida que rota en un plano vertical alrededor de un eje localizado en el centro de la base y perpendicular al plano vertical mencionado (izquierda de figura 2).

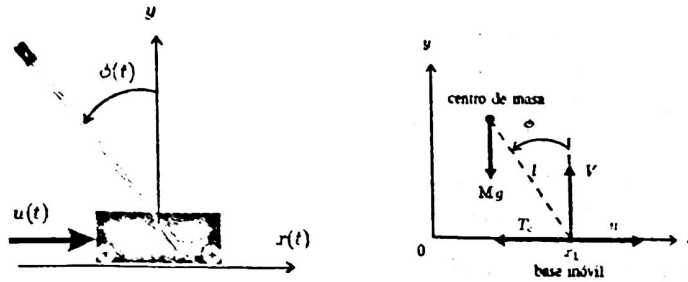


Fig. 2. Esquema simplificado del sistema (izquierda) y su diagrama de fuerzas (derecha).

Para encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema, partimos por anotar las fuerzas que actúan en el sistema B-P (base-péndulo) a través del diagrama de fuerzas mostrado a la derecha de la figura 2, en el cual vemos que hay una fuerza de fricción T_c que se opone al movimiento de la base, la fuerza de reacción V del riel sobre el cual se mueve la base, el peso del sistema $(m_c + m_p)g$, y la fuerza de control u . Identificadas las fuerzas que actúan sobre el sistema B-P, se pueden encontrar las ecuaciones de movimiento que determinan el comportamiento dinámico del sistema B-P; para ello se usan las ecuaciones de Lagrange para el caso no conservativo (1) y las ecuaciones de rodadura que describen el factor no conservativo (2).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\mu} = (Q_\mu)_{nc} + (Q_\mu)_{const} \quad (1)$$

$$\sum_i c_{\alpha i} \dot{q}_i = 0 \quad (2)$$

donde L es lagrangiano del sistema, q_μ son las coordenadas generalizadas y $(Q_\mu)_{nc}$ y $(Q_\mu)_{const}$ representan las fuerzas generalizadas relativas a fuerzas conservativas y no conservativas, respectivamente.

El modelo matemático encontrado esta dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales

$$(J + Ml^2 \sin^2 x_2) \frac{d^2 x_2}{dt^2} + Ml^2 \sin x_2 (\cos x_2) \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 - Mgl \sin x_2 + D_p = (u - T_c) l \cos x_2$$

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} - Ml(\cos x_2) \frac{d^2 x_2}{dt^2} + Ml(\sin x_2) \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 = u - T_c \quad (4)$$

Estas dos ecuaciones se pueden escribir como

$$M'(x_2)\ddot{X} + C(x_2, \dot{x}_2)\dot{X} + G(x_2) = \tau(x_2, \dot{x}_2) \quad (5)$$

donde

$$G = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mgl \sin x_2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & \dot{x}_2 Ml \sin x_2 \\ 0 & \dot{x}_2 Ml^2 \sin x_2 \cos x_2 \end{pmatrix},$$

$$M' = \begin{pmatrix} M - Ml \cos x_2 \\ 0J + Ml^2 \sin^2 x_2 \end{pmatrix} \text{ y } \tau = \begin{pmatrix} u - T_c \\ (u - T_c)l \cos x_2 - D_p \end{pmatrix}$$

$M'(x_2)$ en la ec. (5) es una matriz que contiene los parámetros de inercia y es llamada la matriz de momentos de inercia o simplemente matriz de inercia; $C(x_2, \dot{x}_2)$ produce términos de fuerzas de Coriolis de la forma $\dot{x}_i \dot{x}_j$ y centrífugas de la forma $\dot{x}_i^2$; $G(x_2)$ contiene el término asociado al peso de la varilla que genera momentos de fuerza en la articulación por la acción de la gravedad y τ contiene las fuerzas producidas por el actuador sobre el sistema.

Auxiliándonos de la ec. (5) y el cambio de variable $\dot{x}_1 = x_3$ y $\dot{x}_2 = x_4$ donde x_3 corresponde a la velocidad del carrito y x_4 a la velocidad angular, podemos expresar el modelo anterior en la forma de Cauchy, de lo cual resulta:

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad x_1(t_0) = a'$$

$$\dot{x}_2 = x_4, \quad x_2(t_0) = b$$

$$\dot{x}_3 = \Delta(a(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + l \cos x_2(\mu \sin x_2 - x_4 f_p)),$$

$$x_3(t_0) = c$$

$$\dot{x}_4 = (l \cos x_2(u - T_c - \mu x_4^2 \sin x_2) + \mu g \sin x_2 - x_4 f_p),$$

$$x_4(t_0) = d$$

$$\text{donde } a = l^2 + \frac{J}{m_c + m_p}, \Delta = \frac{1}{J + Ml^2 \sin^2 x_2} \text{ y } \mu = (m_c + m_p)l.$$

De estas ecuaciones en forma de Cauchy se obtienen los puntos de equilibrio, encontrando que hay uno inestable en la posición invertida y múltiples estables en la posición colgante. Y una estrategia que se usa para estimar una ley de control que estabiliza al péndulo en la posición deseada consiste en linealizar al sistema no lineal alrededor de un punto de equilibrio deseado, este control estabilizará al sistema no lineal alrededor del punto de equilibrio inestable. El modelo linealizado tiene la forma $\dot{y} = Ay + Bu$, esto es;

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\mu l g}{J} & 0 & -\frac{l f_p}{J} \\ 0 & \frac{\mu g}{J} & 0 & -\frac{J_p}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{a}{J} \\ \frac{l}{J} \end{pmatrix} u \quad (6)$$

Parámetros del sistema

Los parámetros principales que son los que aparecen en (6) se hallaron de manera experimental, para esto, se usaron tanto técnicas de identificación en línea como fuera de línea así como algunos experimentos adicionales [5], tales parámetros se encuentran resumidos en la tabla 1.

Parámetro	Unidades	Valor
Parámetro μ	$Kg * m$	0.023392
Constante de gravedad g	$\frac{m}{s^2}$	9.8
Momento de inercia J	$Kg * m^2$	0.0246
Fricción del péndulo f_p	$Kg * \frac{m^2}{s}$	0.000107443
Parámetro a	m^2	0.01026
Parámetro l	m	0.0167903

Tabla 1. Parámetros experimentales del sistema.

3 Síntesis del sistema.

Análisis de estabilidad

Para analizar la estabilidad alrededor del punto de equilibrio inestable, calculamos los eigenvalores de la matriz A de la ecuación (6) que resulta de la linealización, estos deberán poseer parte real negativa para que el sistema sea asintóticamente estable en la vecindad de tal punto de equilibrio. La matriz no es Hurwitz por lo que el sistema es inestable en ese punto [7].

Análisis de controlabilidad

Ahora debemos de verificar que el sistema sea completamente controlable. La matriz de controlabilidad $M = [B \ AB \ A^2B \ A^3B]$ es de rango 4, por lo que el sistema linealizado es de estados completamente controlables y en consecuencia el sistema no-lineal es también controlable en una vecindad del punto de equilibrio.

Diseño del control lineal optimal

La ley de control que se propone, tiene la forma,

$$u = -Ky(t) \quad (7)$$

La matriz de ganancias K la podemos construir usando la herramienta de Matlab $K = lqr(A, B, Q, R)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.1491 & 0 & -6.9 \times 10^{-5} \\ 0 & 9.3187 & 0 & -0.0043 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6944 \\ 0.6504 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } R = [1]$$

Y esencialmente se resuelve la ecuación matricial de Ricatti en horizonte infinito. Las matrices Q y R que penalizan respectivamente el error del estado y el esfuerzo de control en principio son arbitrarias, la única condición que se les pide es que sean simétricas y definidas positivas, esto para garantizar que el sistema tendrá comportamiento asintóticamente estable, pues el sistema es tanto controlable como observable. Esto asienta las condiciones suficientes para la solución de la ecuación de Ricatti y ahora sí tiene sentido hablar de que existe una matriz de ganancias K que minimiza el funcional de costo.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Prosiguiendo con nuestro cálculo con matlab, tenemos que,

$$K = (-0.1000 \quad 43.5990 \quad -2.6407 \quad 14.3403)$$

Por lo tanto la ley de control buscada según la ec. (7) es

$$u = k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + k_4 y_4 \quad (8)$$

si sustituimos la ecuación (8) en la ecuación (6) vemos que con este control la matriz del sistema modificado $\dot{y} = (A - BK)y = Gy$ es Hurwitz, de modo que el sistema en una vecindad del punto de equilibrio inestable tiene ahora comportamiento asintóticamente estable. Si graficamos tomando condiciones iniciales en una vecindad del punto de equilibrio, podremos ver el comportamiento del sistema en una región de estabilidad. En la figura 3 se puede ver una gráfica que muestra el comportamiento del sistema alrededor del punto de equilibrio para la condición inicial $y_0 = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]$.

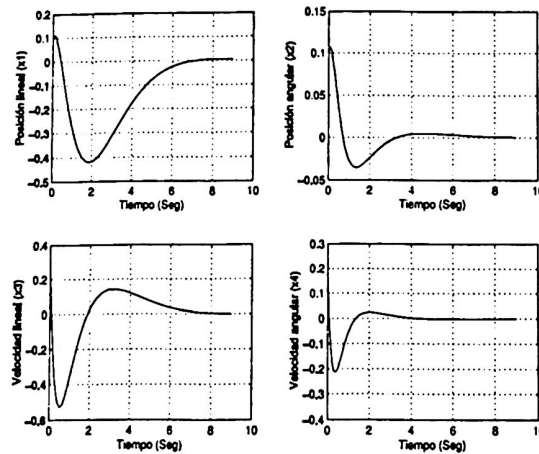


Fig. 3. Comportamiento del sistema base péndulo con el control.

Al implementar las ganancias obtenemos la respuesta en tiempo real con retardo de 10ms mostrada en la figura 4.

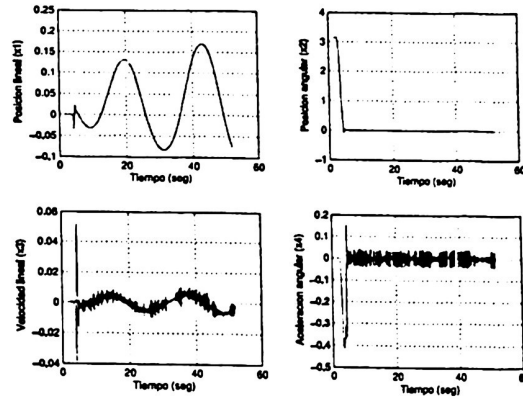


Fig. 4. Evolución de las variables de estado con las ganancias encontradas

Para resolver el problema de las oscilaciones en la posición se usó la siguiente función de control de saturación;

$$f(u) = 1.6 \tanh(u[1]) \quad (9)$$

Si implementamos esta función de control de saturación la respuesta en tiempo real con este control se muestra en la figura 5.

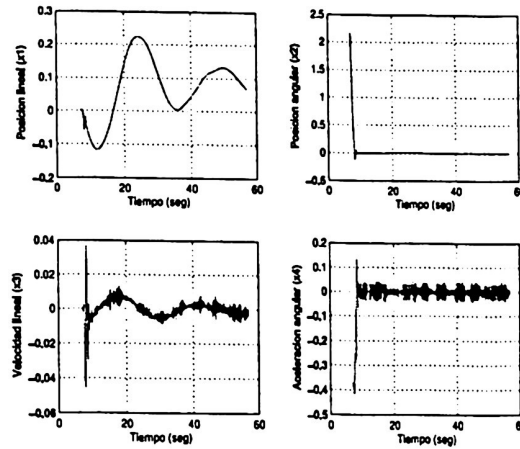


Fig. 5. Evolución de las variables de estado con las ganancias y función de control implementadas

Control para el balanceo.

El control para el balanceo que usamos es un control por energía basado en [1]. Así, para el péndulo simple mostrado a la izquierda de la figura 6, la ecuación de movimiento esta dada por (10) considerando el pivote con velocidad sin límites.

$$J\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + mvl \cos \theta = 0 \quad (10)$$

Las variables de estado son ahora θ y $\dot{\theta}$. La energía del péndulo sin control ($v=0$) esta dada por (11)

$$E = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1) \quad (11)$$

La máxima aceleración del pivote es $v_{max} = \max|v| = ng$. Si introducimos las variables normalizadas $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$, $\tau = \omega_0 t$ y $\omega = \frac{v}{g}$. La ecuación de movimiento normalizada es entonces

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} - \sin \theta + \omega \cos \theta = 0 \quad (12)$$

donde $|\omega| \leq n$. La energía total normalizada del sistema no controlado ($\omega = 0$) esta dada por la ecuación (13)

$$E_n = \frac{E}{mgl} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \cos \theta - 1 \quad (13)$$

El sistema es así caracterizado por dos parámetros solamente, la frecuencia natural de las pequeñas oscilaciones ω_0 y la aceleración máxima normalizada del péndulo $n = \frac{u_{max}}{g}$. El modelo dado por (10) es localmente controlable cuando $\theta \neq \frac{\pi}{2}$.

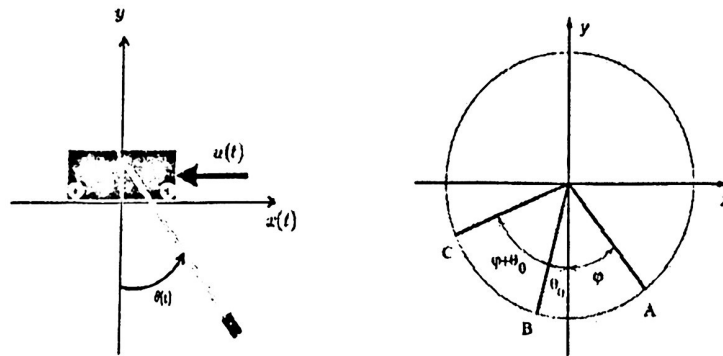


Fig. 6. Péndulo simple con aceleración del pivote (izquierda) y su ilustración geométrica (derecha).

Para balancear el péndulo a la posición vertical hay que dar a este una energía correspondiente a la posición vertical (derecha de la figura 6). Esta corresponde a la trayectoria:

$$E = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1) \quad (14)$$

la cual pasa a través del punto de equilibrio inestable. Una estrategia diferente es capturar al péndulo cuando este pasa por el punto de equilibrio inestable. Tal estrategia también puede capturar el péndulo incluso si hay un error en el control de energía y no pasa por el equilibrio deseado. La energía E de el péndulo no controlado es dado por la ecuación (11). Para realizar un control por energía es necesario comprender como la energía es influenciada por la aceleración del pivote, para ello calculamos:

$$\frac{dE}{dt} = J\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgl\dot{\theta}\sin \theta = -m\dot{u}\dot{\theta}\cos \theta \quad (15)$$

Para incrementar la energía la aceleración del pivote u debe de ser positiva cuando la catidad $\dot{\theta}\cos \theta$ es negativa. Una estrategia de control es fácilmente obtenida por el método de Liapunov, si elegimos $V = \frac{(E-E_0)^2}{2}$

$$\frac{dV}{dt} = -m\dot{u}k((E - E_0)\dot{\theta}\cos \theta)^2 \quad (16)$$

y podemos usar la la ley de control

$$u = k(E - E_0)\dot{\theta}\cos \theta \quad (17)$$

Vemos que la derivada de la función de Liapunov disminuye mientras $\dot{\theta} \neq 0$ y $\cos \theta \neq 0$. Esta estrategia conduce la energía hacia su valor deseado E_0 . Para cambiar la energía tan rápido como sea posible la magnitud de la señal de control deberá ser tan grande como sea posible. Esto es logrado con la ley de control (18).

$$u = ng\text{sign}((E - E_0)\dot{\theta}\cos \theta) \quad (18)$$

la cual conduce a la función $V = |E - E_0|$ a cero y E hacia E_0 . La ley de control puede resultar inadecuada. Esto puede ser evitado con la ley de control (19).

$$u = \text{sat}_{ng}(k(E - E_0)\text{sign}(\dot{\theta}\cos \theta)) \quad (19)$$

donde sat_{ng} denota una función lineal la cual se satura en ng . La estrategia (19) se comporta como el controlador lineal (17) para pequeños errores y como la estrategia (18) para grandes errores. En la figura 7 se muestra la respuesta en tiempo real con los dos controles implementados.

4 Conclusiones.

En este trabajo se retomo la idea de usar un control lineal optimal proporcional al vector de estado junto con un control saturado, para resolver el problema de estabilización del péndulo invertido del prototipo de Feedback.

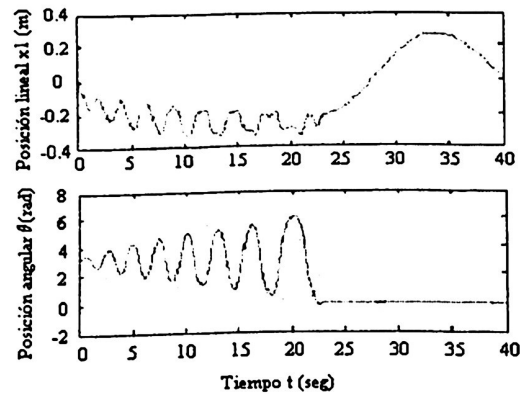


Fig. 7. Evolución de la posición angular y posición lineal con los controles implementados.

Por otra parte se implementó el control no lineal basado en energía propuesto por [1] para resolver el problema del swing up.

Finalmente, se implementaron los dos controles siguiendo la idea del control híbrido a fin de llevar el péndulo de la posición colgante inicial a la posición invertida final.

A futuro se puede encontrar un control cuya respuesta en tiempo real muestre características de desempeño más dinámicas en relación a las encontradas hasta ahora.

References

1. Aström, K. J. and K. Furuta, *Swinging -up a pendulum by energy control*, IFAC congress, pp. 37-95, 1996.
2. K. Furuta, *Control of pendulum: From super mechano-system to human adaptive mechatronics*, 42nd, IEEE. CDC, 2003.
3. Gordillo, F., F. Salas and J. Aracil, *A forwarding controller for the pendulum on a cart*, Proceedings of Control, Vol. 6. Portugal, 2004.
4. J. A. Acosta, F. Gordillo, J. Aracil, *A new sg law for swinging the furuta up pendulum*, Dept. de Ingeniería de Sistemas y Automática, Universidad de Sevilla, España.
5. R. Murueta Fortiz, *Algoritmo de estabilización de un péndulo invertido sobre base móvil*, Tesis de Licenciatura, FCFM, BUAP, Febrero 2008.
6. M. Egerstedt, X. Hu and A. Stotsky *A Hybrid Control Approach to Action Coordination for Mobile Robots*, Div. of Optimization and Systems Theory, Royal Institute of Technology, SE-100 44, Stockholm, Sweden.
7. V. V. Alexandrov, S. I. Zlochevskii, R. Reyes Sánchez, H. Salazar Ibargüen, *Introducción a la Modelación Matemática de los Sistemas Controlables*, Cap. 2, Pag. 47, BUAP, Puebla, 2000.